

Contrôle 4

Mathématiques en technologies de l'information 4 – ISC_421

Iliya Saroukhanian

25 juin 2024

Table des matières

1	Polynômes de Taylor	4
1.1	L'erreur maximale théorique	4
2	Polynômes d'interpolation	6
2.1	Erreur maximale théorique	7
2.2	Phénomène de Runge	7
3	Stratégie d'approximation polynomiale	9
4	Calcul des dérivées à l'aide des $\delta^k y$ du polynôme de Newton	10

Liste des Figures

1.1	Polynômes de Taylor & l'erreur maximale théorique	4
2.1	Polynômes d'interpolation avec 2 subdivisions d'intervalle différentes	6
2.2	Erreur théorique maximale lors de l'interpolation	7

1 Polynômes de Taylor

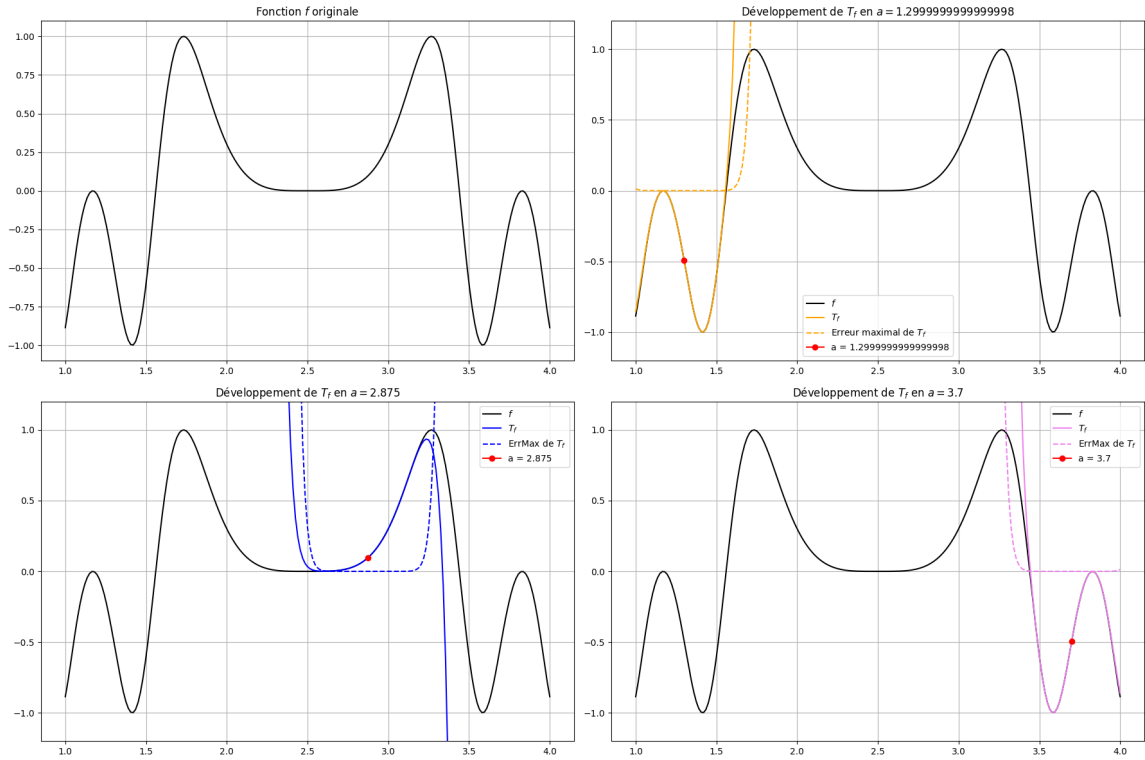


Figure 1.1: Polynômes de Taylor & l'erreur maximale théorique

1.1 L'erreur maximale théorique

L'erreur $R_{f,n,a}$ commise en un point lors de l'évaluation du polynôme de Taylor d'une fonction est définie de la sorte :

$$R_{f,n,a}(x) = |f(x) - T_{f,n,a}(x)|$$

Par conséquent, nous savons donc que l'erreur $R_{f,n,a}$ est bornée par la plus grande valeur du $(n + 1)$ ème terme de la série de Taylor évaluée au un point ξ de l'intervalle I .

$$R_{f,n,a}(x) \leq \max_{\xi \in I} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Ceci implique donc que l'erreur maximale théorique commise lors de l'évaluation du polynôme de Taylor dépend de son degré et donc par définition du “degré” de la dérivée auquel on a accès de la fonction f .

Sur la Figure 1.1, lors de la construction des polynômes de Taylor, nous pouvons observer l'erreur maximale théorique commise (en traitillé). Il est pertinent de remarquer que localement autour des points a_i par rapport auxquels les polynômes de Taylor sont construits, l'erreur maximale théorique est de 0 (du moins, elle tend fortement vers cette valeur). Cependant, dès qu'on atteint les limites de “l'intervalle de précision” du polynôme, la valeur de l'erreur explose vers l'infini.

2 Polynômes d'interpolation

Dans cette partie, nous allons présenter les graphiques de divers polynômes d'interpolation. Ceux-ci ont été calculés grâce à la fonction `lagrange` proposée dans le module `scipy.interpolate`.

Il était aussi demandé d'effectuer ces interpolations en subdivisant l'intervalle $I = [a, b]$ (où $a = 1$ et $b = 4$ dans mon cas) de deux manières différentes. Les points rouges représentent donc le découpage uniforme/équidistant. Quant aux bleus, ceux-ci sont les points de Chebyshev (comme vous avez pu le deviner, ceux-ci ne sont pas équidistants).

Les graphiques ci-dessous mettent en avant les divers polynômes d'interpolation jusqu'à 12 points d'interpolation.

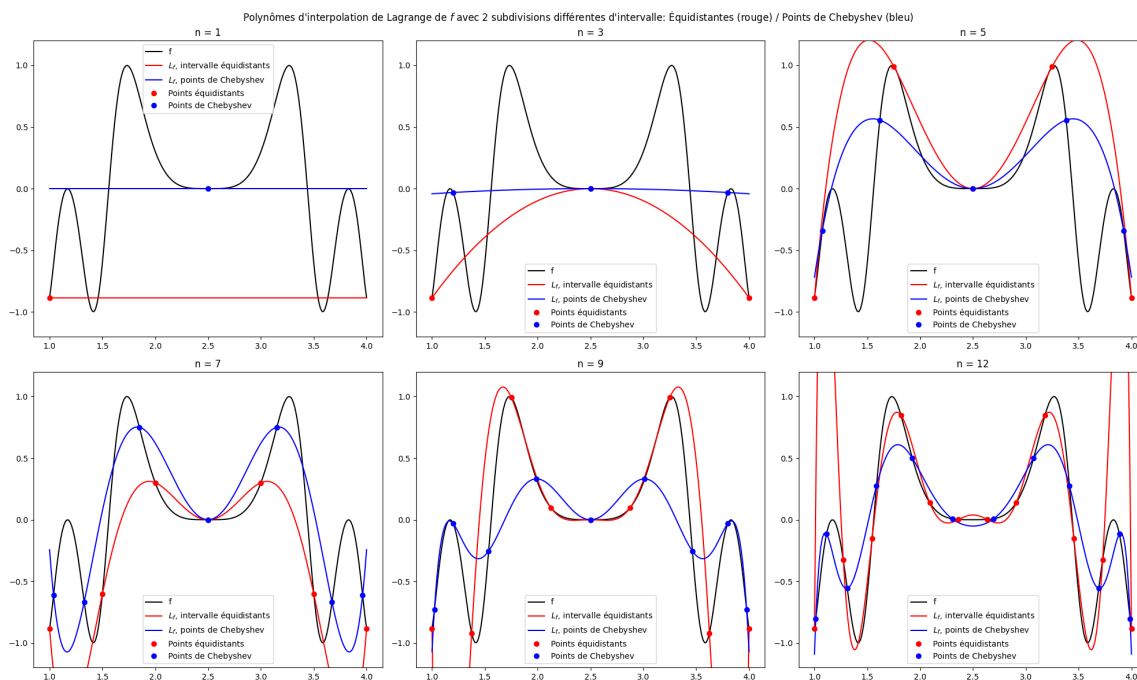


Figure 2.1: Polynômes d'interpolation avec 2 subdivisions d'intervalle différentes

La raison pour laquelle nous avons choisi 12 points est due au fait que nous allons par la suite calculer l'erreur maximale théorique commise lors de l'interpolation. Afin de déterminer celle-ci, nous sommes à nouveau borné par la quantité de dérivées que nous possédons de la fonction f . Dans notre cas, vu que nous avons accès qu'aux maximums des 13 premières dérivées, nous pouvons donc calculer l'erreur que pour 12 points d'interpolation.

2.1 Erreur maximale théorique

Ci-dessous, nous pouvons visualiser l'erreur maximale théorique commise lors de l'interpolation avec une quantité de points diverse (jusqu'à 12 inclus).

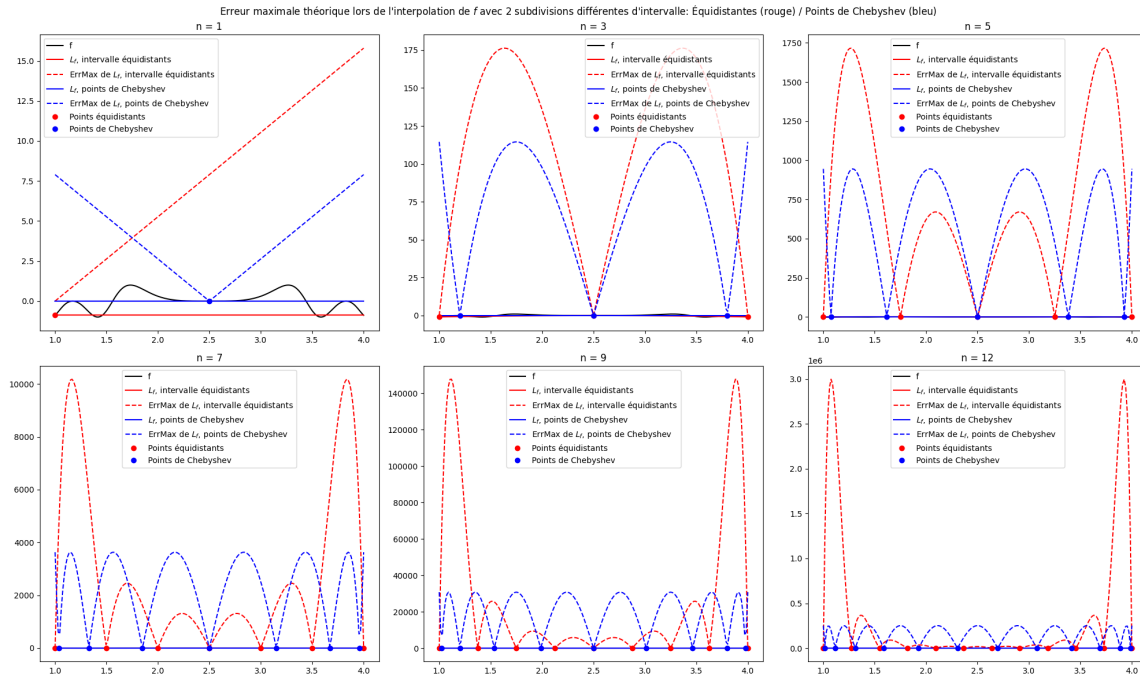


Figure 2.2: Erreur théorique maximale lors de l'interpolation

Les graphiques ci-dessus, nous permettent d'observer le fait que dans le cas de la stratégie de points équidistants (traitillé rouge), l'erreur maximale théorique s'affaiblit au niveau du centre des graphiques plus on augmente le nombre de points d'interpolation. Cependant, plus on s'éloigne du centre du graphique, plus l'erreur maximale croît jusqu'à devenir très grande aux extrémités du graphe. Ceci reflète notamment l'effet de Runge produit lors de l'interpolation à travers des points équidistants. En revanche, lors de l'interpolation à travers les points de Chebyshev (traitillé bleu), on remarque que le "comportement" de l'erreur maximale théorique reste toujours le même, peu importe où nous nous situons sur le graphique. Cette observation nous permet donc de conclure que l'interpolation à travers les points de Chebyshev permettent de palier au phénomène de Runge mais avec un potentiel "trade-off" (en bon français) en terme de précision d'interpolation au niveau du centre du graphique.

2.2 Phénomène de Runge

Lorsqu'on calcule des polynômes d'interpolation dans un certain intervalle I et avec un nombre de points croissants, on peut apercevoir un comportement étrange au bord de cet

intervalle. Plus le nombre de points augmente, plus le polynôme a tendance à osciller fortement vers les extrémités de l'intervalle.

Sur la Figure 2.1, il est possible de remarquer que les extrémités de l'intervalle I sont grandement affectées par le phénomène de Runge lors de l'interpolation avec une subdivision équidistante des points suite aux fortes d'oscillations affichées.

3 Stratégie d'approximation polynomiale

Comme le montre très bien la Figure 2.1, plus le nombre de point croît, plus les approximations, notamment au centre du graphique semble de très bonne qualité. Malheureusement, un bémole conséquent apparaît qui est le phénomène de **Runge** qu'on a explicité précédemment.

Afin d'y remédier et d'obtenir tout de même des interpolations correctes, il est potentiellement possible, de subdiviser l'intervalle $I = [a, b]$ en sous-intervalles plus petits à travers lesquels nous utiliserons des polynômes d'interpolation de faible degré (maximum 3) pour palier aux oscillations qui sont introduites par des polynômes de fort degré interpoler à travers de points équidistants.

Ayant introduit cette stratégie, il est important de se rendre compte qu'un polynôme d'interpolation de faible degré n'est précis que de manière locale. Ceci implique donc le fait qu'il sera nécessaire d'approximer tous les points de manière locale à l'aide d'un polynôme de degré faible puis de finalement, construire un assemblage de tous ces polynômes en un seul qui minimisera l'erreur.

4 Calcul des dérivées à l'aide des $\delta^k y$ du polynôme de Newton

“Les différences divisées $\delta^k y[x_0, \dots, x_k]$ peuvent s'interpréter comme les *dérivées discrètes* de la fonction $f(x)$. En effet, si on considère $\delta^1 y[x_0, x_1]$, alors si x_0 est très proche de x_1 , par exemple $x_1 = x_0 + h$ (et en rappelant que $f(x_k) = y_k$), on voit que”¹

$$\delta^1 y[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \simeq f'(x_0)$$

¹[Approximation polynomiale 2024](#), Dr. Mathieu Baillif